Continue

En el curso de estadística, se abordarán conceptos cruciales como las variaciones, combinaciones y permutaciones, que son fundamentales para entender los principios de la probabilidad. Estos elementos son esenciales no solo para los estudios académicos, sino también para aplicaciones prácticas en diversos campos, como la investigación, la toma de decisiones y la planificación. Aprender la combinación, la variación y la permutación ayudará a los estudiantes a resolver problemas complejos y a interpretar datos de manera más efectiva. Además, se discutirá la importancia de estos conceptos en el cálculo de probabilidades y se proporcionarán ejemplos prácticos que facilitarán la comprensión. A través de ejercicios diseñados para diferentes niveles de dificultad, los lectores podrán fortalecer su entendimiento sobre cómo aplicar correctamente las variaciones, combinaciones y permutaciones en problemas reales. Importancia de las variaciones, combinaciones y permutaciones en estadística Las matemáticas desempeñan un papel crucial en el análisis de datos y la estadística. Entre los conceptos más relevantes se encuentran las variaciones, combinaciones y permutaciones. Estas herramientas nos permiten calcular la cantidad de maneras en que se pueden organizar o seleccionar elementos de un conjunto, lo que es esencial para la toma de decisiones y la predicción de resultados. La correcta aplicación de las combinaciones, permutaciones y variaciones es fundamental, ya que de ello depende la precisión de las conclusiones que se pueden extraer de un análisis. En estadística, la probabilidad está intrínsecamente relacionada con estas tres dimensiones. La habilidad para distinguir entre combinaciones, permutaciones y variaciones permite a los estudiantes resolver problemas en diferentes contextos, desde la elección de un equipo hasta la configuración de datos en experimentos. Comprender estas herramientas no solo mejora el análisis estadístico, sino que también potencia la capacidad para formular hipótesis y validar teorías. Definición de variaciones y su aplicación en la resolución de problemas Las variaciones se refieren específicamente a la disposición o arreglo de un subconjunto de elementos extraídos de un conjunto mayor, donde el orden de los elementos es de suma importancia. En otras palabras, dos arreglos que contienen los mismos elementos pero en diferente orden se consideran diferentes variaciones. Por ejemplo, al elegir un ganador y un segundo lugar en una carrera, el primer y segundo lugar son clasificados de manera distinta, lo que resalta la importancia del orden. Las variaciones se pueden clasificar en dos tipos: variaciones sin repetición y variaciones con repetición. En las variaciones sin repetición, cada elemento del conjunto es único y se utiliza solo una vez, mientras que en las variaciones con repetición, los mismos elementos pueden ser elegidos más de una vez. Esta distinción es clave para resolver problemas que involucran arreglos. Ejemplo de variaciones sin repetición Supongamos que tenemos un grupo de tres amigos: A, B y C. Si queremos seleccionar a dos de ellos para una presentación, las variaciones sin repetición serían: A, B A, C B, A B, C C, A C, B Observamos que, aunque el grupo seleccionado sea el mismo, el orden en que se presentan los amigos marca una diferencia. El número de variaciones sin repetición se puede calcular con la fórmula: V(n, r) = n! / (n – r)! donde n es el número total de elementos y r es la cantidad de elementos a seleccionar. Ejemplo de variaciones con repetición Si, en lugar de amigos, hablamos de colores, supongamos que queremos seleccionar 2 colores de un conjunto donde los colores pueden repetirse: Rojo, Azul y Verde. Las variaciones con repetición serían: Rojo, Rojo Rojo, Azul Rojo, Verde Azul, Rojo Azul, Azul Azul, Verde Verde, Rojo Verde, Azul Verde, Verde La fórmula para calcular las variaciones con repetición es: V(n, r) = n^r donde n es el número total de elementos y r es la cantidad de elementos a seleccionar. Combinaciones: selección de elementos sin importar el orden A diferencia de las variaciones, las combinaciones se centran en la selección de un subconjunto de elementos de un conjunto mayor sin tener en cuenta el orden de los elementos. Es decir, una combinación de elementos es igual independientemente del orden en que se seleccionan. Por ejemplo, si seleccionamos frutas como manzanas y peras, «manzana y pera» es la misma combinación que «pera y manzana». Las combinaciones son especialmente útiles en situaciones donde el grupo seleccionado importa, pero el orden no. La fórmula para calcular el número de combinaciones de n elementos tomados r a la vez es: C(n, r) = n! / (r! * (n – r)!) donde n es el número total de elementos y r es la cantidad de elementos a seleccionar. Ejemplo de combinaciones Imaginemos que un profesor quiere seleccionar a 3 estudiantes de un grupo de 10. El número de maneras en que puede hacerlo se calcula usando la fórmula de las combinaciones: C(10, 3) = 10! / (3! * (10 – 3)!) = 120 Esto indica que hay 120 formas diferentes de elegir 3 estudiantes del grupo sin importar el orden. Como se puede ver, el enfoque en la combinación permite una mayor flexibilidad en el análisis de situaciones donde el orden no influye. Permutaciones: organización completa de elementos en orden Las permutaciones, al igual que las variaciones, toman en cuenta el orden, pero a diferencia de estas, se aplican a la totalidad de los elementos. Esto significa que estamos organizando todos los elementos de un conjunto. Las permutaciones pueden ser sin repetición, donde cada elemento es único, o con repetición, donde se permiten elementos iguales. La fórmula de las permutaciones sin repetición es: P(n) = n! En el caso de las permutaciones con repetición, la fórmula se modifica a: P(n; n1, n2, …, nk) = n! / (n1! * n2! * … * nk!) donde n es el total de elementos y n1, n2, …, nk son las repeticiones de cada elemento. Ejemplo de permutaciones sin repetición Si tenemos 4 letras A, B, C y D, el número total de permutaciones sería: P(4) = 4! = 24 Esto significa que hay 24 maneras diferentes de organizar estas 4 letras. Ejemplo de permutaciones con repetición Si tenemos una palabra como «MISS», que tiene letras repetidas, el cálculo de permutaciones se realizará considerando la repetición: P(4; 1, 1, 2) = 4! / (1! * 1! * 2!) = 12 Esto indica que hay 12 formas distintas de organizar las letras «MISS», teniendo en cuenta la repetición de la letra «S». Ejercicios resueltos: variaciones con ejemplos detallados Ahora, veamos algunos ejercicios resueltos que nos ayudarán a reforzar el entendimiento sobre las variaciones. Primero, analizaremos un ejemplo de variaciones sin repetición y luego uno de variaciones con repetición. Ejercicio resuelto: variaciones sin repetición Consideremos que un entrenador de baloncesto quiere elegir un capitán y un subcapitán de un equipo con 5 jugadores. Para encontrar el número de variaciones sin repetición: V(5, 2) = 5! / (5 – 2)! = 5! / 3! = 20 Esto significa que hay 20 maneras diferentes de elegir a un capitán y un subcapitán. Importancia del orden es evidente, ya que el capitán y el subcapitán no son lo mismo. Ejercicio resuelto: variaciones con repetición Supongamos que un club de lectura puede seleccionar 3 libros de una colección de 4 libros donde algunos libros pueden repetirse. Para resolver el problema, calculamos: V(4, 3) = 4^3 = 64 Esto indica que hay 64 formas diferentes de seleccionar los libros adecuados para la lectura, al permitir repeticiones. Ejercicios resueltos: combinaciones y sus aplicaciones prácticas Ejercicio resuelto: combinaciones simples Veamos un caso práctico con combinaciones. Imaginemos que hay 8 frutas y se necesita seleccionar 4 para una ensalada de frutas. Utilizaremos la fórmula de combinaciones: C(8, 4) = 8! / (4! * (8 – 4)!) = 70 Esto significa que hay 70 maneras diferentes de seleccionar las frutas, sin importar el orden en que se mezclen. Ejercicio resuelto: combinaciones en un contexto empresarial Un dueño de negocio quiere elegir 2 productos de una lista de 6 para una promoción. Para calcular el número de combinaciones, hacemos lo siguiente: C(6, 2) = 6! / (2! * (6 – 2)!) = 15 Existen 15 distintas combinaciones de productos para promocionar, lo que significa que hay varias elecciones estratégicas que se pueden realizar. Ejercicios resueltos: permutaciones con y sin repetición Ejercicio resuelto: permutaciones sin repetición Imaginemos que queremos organizar 3 libros diferentes en nuestra estantería. Para calcular las permutaciones sin repetición, procederemos de la siguiente manera: P(3) = 3! = 6 Hay 6 maneras diferentes de organizar los 3 libros. Ejercicio resuelto: permutaciones con repetición Ahora consideremos una situación donde tenemos la palabra «BEBE». Para encontrar cuántas permutaciones podemos crear, utilizamos: P(4; 2, 2) = 4! / (2! * 2!) = 6 Por lo tanto, se pueden formar 6 arreglos diferentes con las letras de la palabra «BEBE», teniendo en cuenta las letras repetidas. Problemas de adición y multiplicación en combinatoria En combinatoria, los principios de adición y multiplicación son esenciales para resolver problemas complejos que involucran variaciones, combinaciones y permutaciones. Estos principios nos permiten combinar diferentes escenarios para obtener resultados más amplios. Principio de adición El principio de adición se aplica en situaciones donde hay múltiples formas de lograr un resultado. Por ejemplo, si hay 5 maneras de hacer algo A y 3 maneras de hacer algo B, entonces hay 5 + 3 = 8 maneras de hacer A o B. Principio de multiplicación El principio de multiplicación es aplicable cuando un resultado se puede obtener mediante diferentes etapas. Si hay 4 maneras de elegir una entrada y 3 maneras de elegir un postre, entonces hay 4 * 3 = 12 maneras de elegir un plato completo. Ejercicio práctico: arreglos de personas en el cine Consideremos un ejercicio práctico donde debemos hallar el número de maneras en que 2 varones y 3 chicas pueden sentarse en un cine, asegurando que un varón no se siente al lado del otro. Para resolver esto, primero organizaremos a las chicas y luego insertemos a los varones. 1. Hay 3 chicas que se pueden organizar en: P(3) = 3! = 6 2. Esto crea espacios O para los varones donde se pueden sentar: G _ G _ G Esto produce 4 espacios para los dos varones (antes de la primera chica, entre las chicas y después de la última chica). 3. De esos 4 espacios, elegimos 2 para que se sienten los varones: C(4, 2) = 6 4. Finalmente, los varones pueden sentarse entre esos dos espacios, por lo que: P(2) = 2! = 2 El total de arreglos = 6 * 6 * 2 = 72. Conclusión y anticipación de nuevos ejercicios Además, se han resuelto múltiples ejercicios que demuestran la aplicación práctica de estas teorías en ejemplos sencillos y de la vida diaria. La comprensión de la diferencia entre combinaciones, permutaciones y variaciones es esencial para abordar problemas de forma eficaz. A medida que avancen en su aprendizaje, se anticipan nuevos ejercicios y problemas de aplicación. Estos recursos adicionales les permitirán seguir fortaleciendo su comprensión y aplicando lo aprendido en situaciones más complejas e interesantes. Recursos adicionales para profundizar en el tema Para aquellos interesados en profundizar más en el mundo de las combinaciones, permutaciones y variaciones, hay diversas fuentes, incluyendo libros de matemáticas, recursos en línea y tutoriales interactivos. Algunos recursos recomendados son: Libros sobre teoría de conjuntos y combinatoria. Plataformas de aprendizaje en línea que ofrezcan cursos de matemáticas y estadística. Sitios web educativos que ofrezcan ejercicios adicionales y problemas de práctica. Con el tiempo, se convertirá en un experto en combinaciones, permutaciones y variaciones, mejorando su habilidad en análisis de datos y resolución de problemas. ¡Sigan practicando! Las permutaciones y combinaciones son conceptos matemáticos fundamentalmente útiles en diversas situaciones cotidianas y en el ámbito de la estadística. Entender cómo funcionan y cómo se aplican permite a los estudiantes y profesionales resolver problemas prácticos de manera efectiva. ¿Qué son las permutaciones y combinaciones? En el ámbito de la matemática, las permutaciones son maneras diferentes en las que se pueden organizar un conjunto de objetos, donde el orden de los elementos es significativo. Por ejemplo, cuando se habla de organizar a un grupo de personas en una fila, el lugar que ocupa cada persona (primer, segundo, tercer lugar) determina una permutación. En matemáticas, la fórmula para calcular las permutaciones se expresa como P(n, k) = n! / (n-k)!, donde n representa el número total de elementos y k el número de elementos a seleccionar. Por otro lado, las combinaciones se refieren a las diferentes formas de seleccionar elementos de un conjunto donde el orden no importa. Esto significa que si tomamos un grupo de frutas, como manzanas y peras, al seleccionar dos frutas, el resultado “manzana, pera” es lo mismo que “pera, manzana”. La fórmula para calcular combinaciones es C(n, k) = n! / (k! * (n-k)!), y es vital en situaciones como la formación de equipos o comités. Las diferencias entre estos dos conceptos son clave, ya que afectan cómo se resuelven los problemas en los que se aplican. Por ejemplo, en un juego de cartas donde se elige una mano específica, el orden con el que se reciben las cartas es una permutación, mientras que elegir 5 cartas de un mazo sin importar el orden es una combinación. Importancia de las permutaciones en problemas reales Las permutaciones son esenciales en muchos problemas de la vida real, especialmente en situaciones donde el orden es un factor crucial. Por ejemplo, los resultados obtenidos en competencias deportivas o académicas están determinados por el orden en el que se terminan las carreras; el que gana es el que coloca su nombre en el primer lugar. Asimismo, en caso de decidir la asignación de premios en un sorteo, las permutaciones juegan un papel vital en establecer quién recibe qué, dado que el premio que gana cada persona es diferente. En el ámbito de la tecnología, las permutaciones son utilizadas en algoritmos de búsqueda y optimización, donde se debe considerar el mejor resultado posible entre diversas combinaciones de opciones. Por lo tanto, entender cómo calcular permutaciones puede llevar a implementar resoluciones más eficaces en programación y análisis de datos. Además, en el mundo de los negocios, las combinaciones y permutaciones se utilizan para crear estrategias de marketing, donde cada campaña puede considerarse una permutaión diferente de anuncios y presentaciones. Aquí, saber cómo agrupar diferentes elementos puede brindar una ventaja competitiva significativa. Ejemplos de permutaciones en la vida cotidiana Las permutaciones no solo se encuentran en contextos académicos, sino que también se pueden observar en situaciones cotidianas. Considera el caso de una fiesta donde invitas a tus amigos y decides a quién sentar junto a quién. La forma en que organices a tus amigos en la mesa se convierte en un problema de permutaciones. Aquí, cada disposición del grupo puede cambiar la dinámica de la conversación y la interacción entre los invitados. Otro ejemplo sencillo es el de un juego de mesa. Imagina que tienes tres piezas de colores diferentes: rojo, azul y verde. Si las ordenas en un tablero, obtendrás diferentes configuraciones. La cantidad de formas en que puedes organizar esas piezas es un cálculo de permutaciones. En este caso, las diferentes configuraciones generan una experiencia de juego única. También podrías considerar el orden en que se presentan los platos en un menú: el primero, segundo y postre tiene un impacto en la experiencia gastronómica. Las permutaciones también juegan un papel fundamental en la ciencia de datos, específicamente en la selección y priorización de variables en un estudio. Cuando los investigadores ordenan factores en función de su relevancia, las diferentes configuraciones pueden arrojar resultados distintos. La capacidad de analizar estas permutaciones les ayuda a identificar qué combinaciones producen los resultados más significativos. Ejemplos de combinaciones en diversas situaciones Las combinaciones se encuentran presentes en diversas situaciones de la vida cotidiana. Un ejemplo común es la selección de ingredientes para elaborar una ensalada. Si tienes disponibles lechuga, tomate y pepino, puedes elegir dos de estos ingredientes para crear una combinación. En este caso, la selección de los ingredientes es lo que importa, no el orden en que los elijas. Así, tener lechuga y tomate es lo mismo que tener tomate y lechuga. Otro ejemplo en un entorno escolar sería la elección de un grupo de representantes de clase. Supón que hay cinco estudiantes y se necesita elegir a tres para representar al grupo en una reunión. Aquí, no importa el orden en que se seleccionan, ya que cada uno de ellos tiene el mismo rol como representante, lo que hace que este sea un caso evidente de combinaciones. Las combinaciones también se utilizan en el ámbito de la investigación y el análisis. Al elegir un grupo de variables que se incluyen en un modelo estadístico, los investigadores están seleccionando combinaciones que pueden tener un impacto significativo en los resultados. En todos estos ejemplos, observar cómo interactúan los elementos entre sí nos ayuda a entender las combinaciones y cómo se aplican en diferentes contextos. Diferencias clave entre permutaciones y combinaciones Las diferencias entre permutaciones y combinaciones son clave para evitar confusiones en la resolución de problemas. La principal diferencia radica en el orden de los elementos. En las permutaciones, el orden de los elementos seleccionados es vital, lo que significa que cada disposición cuenta como un resultado diferente. Por ejemplo, si elegimos las letras A, B y C, las permutaciones posibles serían ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA, resultando en un total de seis configuraciones. En contrastante, las combinaciones no toman en cuenta el orden. Usando el mismo grupo de letras A, B y C, las combinaciones posibles, al seleccionar dos letras, serían AB, AC y BC, por lo que hay solo tres combinaciones. Esto muestra que las combinaciones arrastran un número menor de resultados en comparación con las permutaciones dadas las mismas condiciones de selección. Otro aspecto importante a considerar es que mientras que las permutaciones pueden incluir repeticiones (es decir, seleccionar el mismo elemento más de una vez), las combinaciones sin repetición solamente permiten elegir elementos únicos. Así, al entender y reconocer estas diferencias, uno puede aplicar cada enfoque de manera correcta dependiendo del problema que enfrenta. Cómo calcular permutaciones: Fórmulas y ejemplos Calcular permutaciones implica aplicar la fórmula mencionada anteriormente, P(n, k) = n! / (n-k)!. Este proceso comienza entendiendo que la notación «n!» (factorial de n) se refiere a la multiplicación de todos los números enteros desde n hasta 1. Por ejemplo, 5! es igual a 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120. Veamos un ejemplo práctico: Supongamos que deseas calcular cuántas formas hay para ordenar tres libros en una estantería y tienes cinco libros en total (A, B, C, D, E). Usando la fórmula, P(5, 3) = 5! / (5-3)! = 5! / 2! = (5 x 4 x 3) / (2 x 1) = 60. Esto significa que hay 60 formas diferentes de organizar tres de los cinco libros en la estantería. Calcular permutaciones se vuelve relevante en situaciones como el asignar roles en un equipo, donde el asignar un líder, un secretario y un tesorero puede implicar diferentes resultados dependiendo del orden en que se seleccionen. Cada elección afectará el papel que desempeñará cada miembro dentro del equipo, lo que refuerza la importancia de comprender cómo calcular permutaciones. Calcular combinaciones: Métodos y ejemplos prácticos Para entender cómo calcular combinaciones, utilizamos la fórmula C(n, k) = n! / (k! * (n-k)!). De nuevo, recuerda que «n!» representa el factorial de n, pero en este caso también incluimos el factorial de k y el factorial de (n-k) en el denominador. Esto permite identificar las selecciones que no toman en cuenta el orden de los elementos. Por ejemplo, considera un escenario en el que tienes un grupo de seis estudiantes y necesitas seleccionar a dos para formar un equipo. Usando la fórmula, C(6, 2) = 6! / (2! * (6-2)!) = 6! / (2! * 4!) = (6 x 5)/(2 x 1) = 15. Esto implica que existen 15 maneras diferentes de elegir a dos estudiantes del grupo de seis. Estos cálculos de combinaciones son muy útiles en el ámbito educativo, por ejemplo, en el diseño de grupos de estudio o proyectos, donde se desea formar equipos de tamaño específico sin importar el orden de los integrantes. Además, este concepto es clave en la teoría de juegos y en la investigación de mercado, donde los estudios de preferencias entre diferentes productos dependen de combinaciones variadas. Permutaciones con repetición: Explicación y ejemplos Las permutaciones con repetición se refieren a situaciones donde algunos elementos pueden ser elegidos más de una vez. La fórmula para este tipo de problemas es P’(n, r) = n^r, donde “n” es el número total de elementos en un conjunto y “r” es el número de elementos que se pueden seleccionar. Un ejemplo práctico puede ser el de crear un código de cuatro dígitos usando solo los números del 0 al 9. Aquí, el número de posibilidades sería P’(10, 4) = 10^4 = 10,000. Esto significa que hay 10,000 combinaciones diferentes de códigos que se pueden formar, ya que al seleccionar un número, puedes repetir la selección en cualquier posición del código. Este tipo de permutaciones es bastante común en situaciones donde se desarrollan combinaciones de contraseñas, números de serie, o incluso al realizar mezclas de colores en el arte. Por ejemplo, si un artista decide pintar utilizando cinco colores diferentes y puede seleccionar cada uno varias veces, las distintas combinaciones y la forma en que las coloca en la obra resultan en diversas permutaciones. Permutaciones circulares: Concepto y aplicaciones Las permutaciones circulares se refieren a cómo se pueden organizar los elementos en un círculo, donde la disposición es relevante, pero el punto inicial no lo es. Para calcular este tipo de permutaciones, se utiliza la fórmula P(n) = (n-1)!, donde «n» es el número de elementos a organizar. Un ejemplo de esto sería organizar a cinco personas alrededor de una mesa redonda. La fórmula sería P(5) = (5-1)! = 4! = 24. Así, hay 24 formas diferentes de sentar a las personas sin preocuparse por el punto de inicio, lo que hace que el cálculo de permutaciones circulares sea esencial para eventos y celebraciones. En la práctica, este concepto se aplica a la planificación de mesas para banquetes, fiestas, bodas o encuentros comunitarios donde cuidar cómo se colocan los invitados puede influir en la socialización y la dinámica. Es una forma de dar estructura y un sentido de orden a situaciones que, de otra manera, serían caóticas. Ejercicios prácticos sobre permutaciones Para consolidar la comprensión de las permutaciones, proponemos algunas actividades: Imagina un grupo de amigos (A, B, C). Responde a las siguientes preguntas: ¿Cuántas maneras diferentes hay para organizar a estos tres amigos en una fila? Si A y B son amigos inseparables y siempre deben estar uno al lado del otro, ¿cuántas formas hay para organizarlos? Si en un torneo se eligen tres jugadores de un grupo de cinco, ¿cuántas permutaciones se pueden hacer considerando todos los jugadores? Asegúrate de calcular las respuestas y repasar cómo se aplican las fórmulas de permutaciones en cada caso. Ejercicios prácticos sobre combinaciones En cuanto a las combinaciones, se pueden realizar las siguientes actividades prácticas: Considera un grupo de frutas: manzanas, naranjas y plátanos. Responde a estos ejercicios: ¿De cuántas formas se pueden elegir 2 frutas de las 3 disponibles? Si se tienen 5 colores de pintura y necesitas elegir 3 para combinar, ¿cuántas combinaciones posibles hay? Si hay 10 alumnos en un salón y se necesita seleccionar a 4 para formar un comité, ¿cuántas combinaciones de alumnos se pueden hacer? Estos ejercicios permiten practicar el cálculo y la aplicación de las combinaciones en situaciones cotidianas, como la elección de ingredientes o miembros de un grupo. Reto final: Preparación de jugos surtidos con frutas Imagina que decides preparar un jugo surtido que lleve tres frutas diferentes de una selección de cinco: mango, piña, fresa, kiwi y naranja. Tu reto consiste en determinar cuántas combinaciones diferentes de jugo puedes crear. ¿Qué frutas elegirías y de cuántas maneras podrías combinarlas? Utilizando la fórmula de combinaciones, podrías calcular las distintas selecciones que puedes hacer de entre las frutas disponibles y experimentar en la cocina haciendo deliciosos jugos. Así, no solo aprendes sobre matemáticas, sino también de sabores y combinaciones culinarias inesperadas. Conclusión: Resumen y reflexiones finales sobre permutaciones y combinaciones Las permutaciones y combinaciones son herramientas matemáticas clave en la resolución de diversos problemas en la vida diaria, desde la organización de eventos hasta la creación de estrategias en negocios. Profundizar en estos conceptos a través de ejemplos y ejercicios permite comprender su aplicación en situaciones cotidianas. Aprender sobre estos temas es esencial para el desarrollo de habilidades matemáticas y pensamiento crítico en múltiples contextos. EJERCICIOS DE VARIACIONES 1. Cuántos resultados distintos pueden producirse al lanzar una moneda cuatro veces al aire. Solución. Influye orden y elementos, y estos se pueden repetir. m = 2, n = 4. VR 2, 4 = 2 4 = 16 2. Cuántos números de cuatro cifras distintos pueden formarse con los elementos del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Solución. Influye orden y elementos, y estos no se pueden repetir. m = 7, n = 4. V7, 4 = 7 · 6 · 5 · 4 = 840 3. ¿De cuántas formas diferentes se pueden repartir tres juguetes diferentes entre cuatro niños, de manera que ningún niño tenga más de un juguete? Solución. Influye orden y elementos, y estos no se pueden repetir. m = 4 (niños), n = 3(juguetes). V4, 3 = 4 · 3 · 2 = 24 4. ¿De cuántas formas diferentes se pueden distribuir cinco bolas distintas en tres cajas diferentes? Solución. Influye orden y elementos, y estos no se pueden repetir. m = 5 (bolas), n = 3 (cajas). V7, 4 = 5 · 4 · 3 = 60 5. En un examen se proponen diez preguntas; cada pregunta tiene tres respuestas posibles (a,b,c). Si se contestan al azar, ¿cuántos exámenes distintos pueden producirse? Solución. Influye orden y elementos, y estos se pueden repetir. m = 3 (a, b, c), n = 10 (10 respuestas). VR 3,10 = 310 = 59049 6. Se extraen sucesivamente dos bolas de una bolsa que contiene seis de diferentes colores. ¿Cuántos resultados distintos pueden producirse? a) Con devolución. b) Sin devolución. Solución. Influye orden y elementos. m = 6 (colores), n = 2 (extracciones). a) Admite repetición: VR 6,2 = 6 2 = 36 b) No admite repetición. V6,2 = 6 · 5 = 30 7. El viaje de la ciudad A a la ciudad B se puede realizar por cinco carreteras distintas. ¿De cuántas formas puede realizarse el viaje de ida y vuelta? Solución. Influye orden y elementos, y estos se pueden repetir. m = 5 (carreteras), n = 2 (viajes, ida y vuelta). VR 5,2 = 5 2 = 25 1 9. Resuelve: Vm, 2 + Vm−2, 2 + Vm−4, 2 =98. Solución. m · (m − 1) + (m − 2) · (m − 3) + (m − 4) · (m − 5) = 98 Se opera y se ordena, obteniendo una ecuación de 2º grado. 3m 2 − 15m − 72 = 0 ⎧m = −3 Resolviendo se obtiene ⎨ . Se admite solo la positiva ⎩ m=8 10. Una matrícula de coche de un país europeo esta formada por 3 letras elegidas entre 27 y 4 números escogidos entre los números comprendidos entre 0 y 9. ¿Cuántos coches se pueden matricular en cada país con este sistema? Solución. Formas de escoger tres letras: Influye orden y elementos, y estos se pueden repetir. m = 27, n = 3. VR 27,3 = 27 3 = 19683 Formas de escoger cuatro números. VR 10,4 = 10 4 = 10000 Cada combinación de letras se puede formar una matrícula con cada combinación numérica, y viceversa, por tanto: nº matrículas = VR 27,3 · VR 10,4 = 27 3 ·10 4 = 196830000 11. Tiras dos dados diferentas al aire. ¿Cuántos resultados distintos pueden producirse? Solución. Influye orden y elementos, y estos se pueden repetir. m = 6 (caras), n = 2 (dados). VR 6,2 = 6 2 = 36 EJERCICIOS DE PERMUTACIONES 1. Resolver: Pm2,3 + Pm −1 = PC m −1 Solución. m! + (m − 1)! = ((m − 1) − 1)! 2!·3! m · (m − 1) · (m − 2)! + (m − 1) · (m − 2)! = (m − 2)! 2 ·3· 2 Se simplifica (m − 2)! , se opera y se obtiene una ecuación de 2º grado. m · (m − 1) + (m − 1) = 1 : 12 m2 − m +m−2 = 0 : 12 m 2 + 11m − 24 = 0 2. De Cuántas formas distintas pueden sentarse cuatro personas alrededor de una mesa. Solución. PC 4 = (4 − 1)¡ = 3 ¡ = 3 · 2 = 6 3. De Cuántas formas pueden alinearse dos chicas y tres chicos. Solución. 5¡ 5 · 4 · 3¡ 5 · 4 P52, 3 = = = 10 2 ¡ · 3¡ 2 · 3¡ 2 2 4. De Cuántas formas pueden actuar en T.V. cuatro cantantes y tres humoristas. Solución. 7¡ 7 · 6 ·5· 4¡ 7 · 6 ·5 = = P74, 3 = = 35 4 ¡ · 3¡ 4 ¡ · 3 · 2 3· 2 5. De Cuántas formas distintas puede obtenerse la suma 8 al lanzar tres dados distintos y sumar los números aparecidos. Solución. Posibilidades de suma 8 con tres dados: 3! 3 · 2 =3 6 + 1 + 1: P32 = = 2! 2 5 + 2 + 1: P3 = 3! = 3 · 2 = 6 4 + 3 + 1: P3 = 3! = 3 · 2 = 6 3! 3 · 2 = =3 2! 2 3! 3 · 2 =3 3 + 3 + 2: P32 = = 2! 2 Total = 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 21 4 + 2 + 2: P32 = 6. De cuántas formas pueden ordenarse siete personas, entre las que figuran Juan y María de manera que Juan y María estén colocados uno al lado de otro. Solución. Se debe considerar que Juan y Maria forman una solo persona, y se multiplica por 2 ya que para cada ordenación existen dos posibles posiciones de Juan y Maria. 2 · P6 = 2 · 6! = 2 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 = 1440 7. Se lanza una moneda ocho veces seguidas y se anotan sucesivamente los resultados obtenidos en cada uno de los lanzamientos. Los ocho lanzamientos constituyen una experiencia. ¿En cuántas experiencias se pueden obtener cinco caras y tres cruces? Solución. 8! 8 · 7 · 6 · 5! 8 · 7 · 6 P85, 3 = = = 56 5!·3! 5!·3 · 2 3· 2 8. ¿Cuántas de las permutaciones formadas por los números {3, 4, 5, 6, 7, 8} empezarán por 3? ¿Cuántas por 64? ¿Cuántas terminarán por 875? Solución. - Que empiezan por 3: P5 = 5! = 5 · 4 · 3 · 2 = 120 - Que empiezan por 64: P4 = 4! = 4 · 3 · 2 = 24 - Que acaben en 875: P3 = 3! = 3 · 2 = 6 9. Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con los números {0, 1, 2, 3, 4}. Solución. Hay que descontar los números que empiezan por 0. P5 − P4 = 5!−4! = 5 · 4 · 3 · 2 − 4 · 3 · 2 = 120 − 24 = 96 10. ¿De cuántas maneras pueden permutarse las letras de la palabra ESCAPARATE dejando fija la P y de modo que los lugares ocupados por consonantes y viceversa? Solución. - Consonantes: P4 - Vocales: P52, 3 P4 · P52, 3 = 4!· 5 · 4 · 3! 5! = 4 · 3 · 5 · 4 = 240 = 4 ·3· 2 · 2 · 3! 2!·3! 3 EJERCICIOS DE COMBINACIONES 1. ¿Cuántas comisiones de tres alumnos pueden formarse con los 35 alumnos de una clase? Solución. ⎛ 35 ⎞35! 35! 35 · 34 · 33 · 32! 35 · 34 · 33 = = = C 335 = ⎜ ⎟= 6545 3 · 2 · 32! 3· 2 ⎝ 3 ⎠3!·(35 − 3)! 3!·32! Otra forma C 335 = 3 V35 P3 = 35 · 34 · 33 = 6545 3· 2 2. ¿Cuántos equipos de 5 atletas se podrían formar para participar en una competición con los doce atletas mejor preparados? Solución. ⎛ 12 ⎞12! 12! 12 ·11 ·10 · 9 · 8 · 7! 12 ·11 ·10 · 9 · 8 5 = 792 C12 = = = ⎜ ⎟= 5 ( ) 5 ! 12 5 ! 5 !·7! 5 · 4 · 3 · 2 · 7! 5· 4 ·3· 2 · − ⎝ ⎠Otra forma V5 12 ·11 ·10 · 9 · 8 5 C12 = 12 = = 792 P5 5· 4 ·3· 2 3. En una carrera en la que toman parte 8 caballos se juega una apuesta que consiste en acertar los dos primeros sin tener en cuenta el orden. ¿Cuántas apuestas diferentes pueden jugarse en esa carrera? Solución. ⎛ 8 ⎞V2 8·7 = 28 C 82 = ⎜ ⎟= 8 = 2! ⎝ 2 ⎠P2 4. De los 48 trabajadores de una empresa se presentan 6 como candidatos a ocupar dos puestos de representante de los trabajadores. ¿Cuántas elecciones son posibles? Solución. 6 ⎛ 48 ⎞V48 48 · 47 · 46 · 45 · 44 · 43 6 ⎜ ⎟= C 48 = ⎜ ⎟= = 12 271 512 6 ·5· 4 ·3· 2 ⎝ 6 ⎠P6 5. En un salón hay 6 matrimonios. Se eligen al azar dos de esas personas: a) ¿Cuántas elecciones distintas son posibles? b) ¿En cuántas de las elecciones posibles habrá dos hombres? c) ¿En cuántas habrá una mujer y un hombre? d) ¿En cuántas de las posibles elecciones habrá un matrimonio? Solución. ⎛ 12 ⎞V 2 12 ·11 2 C12 = ⎜ ⎟= 12 = = 66 a. 2! ⎝ 2 ⎠P2 b. c. d. ⎛ 6 ⎞V 2 6·5 C 62 = ⎜ ⎟= 6 = = 15 2! ⎝ 2 ⎠P2 ⎛ 6 ⎞V1 V1 C16 · C16 = ⎜ ⎟·⎜ ⎟= 6 · 6 = 6 · 6 = 36 ⎝ 1 ⎠ ⎝ 1 ⎠P1 P1 Existen seis matrimonios, por lo tanto 6. 6. En una línea férrea hay 18 estaciones. Si el tren para en todas las estaciones, ¿cuántos viajes distintos pueden realizarse entre ellas? Solución. Hay que escoger la estación de salida y la de llegada, no influyendo el orden porque se sobreentiende que es lo mismo el viaje de A a B que de B a A. ⎛ 18 ⎞V 2 18 ·17 2 = ⎜ ⎟= 18 = = 153 C18 2 ⎝ 2 ⎠P2 4 7. Un alumno puede elegir 3 entre sus 15 compañeros de clase para realizar un viaje, ¿cuántas elecciones distintas pueden hacerse? Solución. 3 ⎛ 15 ⎞V 15 ·14 ·13 3 = ⎜ ⎟= 15 = C15 = 455 3· 2 ⎝ 3 ⎠P3 8. Con 5 clase de vino, ¿cuántas mezclas se pueden formar de tres vinos? Solución. ⎛ 5 ⎞V 3 5 · 4 · 3 = 10 C 35 = ⎜ ⎟= 5 = 3· 2 ⎝ 3 ⎠P3 9. De cuántas formas posibles pueden elegirse dos botellas entre 18 existentes. Solución. ⎛ 18 ⎞V 2 18 ·17 2 C18 = ⎜ ⎟= 18 = = 153 2 ⎝ 2 ⎠P2 10. Con seis pesas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 gr, ¿cuántas pesadas posibles pueden realizarse? Solución. 5 3 V6 V1 V 2 V V4 V C16 + C 62 + C 36 + C64 + C 56 + C 66 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = P1 P2 P3 P4 P5 P6 = 6 6 ·5 6 ·5· 4 6 ·5· 4 ·3 6 ·5· 4 ·3· 2 6 ·5· 4 ·3· 2 + + + + + = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63 1 2 3· 2 4 ·3· 2 5· 4 ·3· 2 6 ·5· 4·3· 2 5 EJERCICIOS DE COMBINATORIA 1. 10 amigos juegan 3 partidas de bolos y al final de cada una anotan el vencedor. ¿Cuántos resultados podrían producirse? Solución. Influye orden (1ª, 2ª y 3ª partida), influyen elementos, y se pueden repetir. 3 VR 10 = 10 3 = 1000 2. En una reunión a la que asisten 8 personas, ¿cuántos saludos se intercambian? Solución. Influyen solo los elementos y no se pueden repetir. ⎛ 8 ⎞V2 8·7 = 28 C 82 = ⎜ ⎟= 8 = 2! ⎝ 2 ⎠P2 3. En una competición en la que participan 16 atletas, se dan tres medallas, oro, plata y bronce. ¿De cuántas formas pueden llevarse las medallas? Solución. Influyen orden y elementos y no se pueden repetir. 3 V16 = 16 ·15 ·14 = 3360 4. ¿De cuántas formas pueden repartirse 6 entradas numeradas para un concierto de rock 6 amigas? Solución. Solo influye el orden. P6 = 6! = 6 · 5 · 4 · 3 · 2 = 720 5. En un torneo regional de ajedrez participan 18 jugadores y se clasifican tres de ellos para pasar a la final. ¿Cuántas posibles clasificaciones hay? Solución. Solo influyen los elementos, no influye orden porque no se clasifican como 1º, 2º y 3º. 3 ⎛ 18 ⎞V 18 ·17 ·16 3 = ⎜ ⎟= 18 = C18 = 816 3· 2 ⎝ 3 ⎠P3 6. Un representante tiene que visitar cuatro pueblos A, B, C, D que comunican todos entre sí. ¿Cuántos itinerarios distintos podría hacer? Solución. Solo influye el orden P4 = 4! = 4 · 3 · 2 = 24 7. Calcular cuantos productos diferentes de dos factores se pueden formar con los dígitos 2, 3 y 5: a) Sin repetición de factores. b) Pudiendo repetirse los factores. Solución. Teniendo en cuenta que el producto de factores es conmutativo, solo influye el orden. V32 3 · 2 = =3 P2 2 a. C 32 = b. CR 32 = C 32+ 2−1 = C 24 = V42 4 · 3 = =6 P